Colegiul Național
Emil Racoviță Iași
Excelență în educație

Aleea Nicolina Nr. 4
IASI - 700221, ROMANIA
CF 4701592
Tel/Fax: +(40)-232-234 272
email: office@racovita.ro
Web page: www.racovita.ro

Leris 2019, ediția a II-a

Clasa a VII-a

1. Fie mulțimea $A = \left\{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | m,n > 0 \text{ și } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2020}\right\}$.

a) Arătați că mulțime *A* este nevidă;

b) Arătați că dacă $(m,n) \in A$, atunci $m > 2020$ și $n > 2020$;

c) Determinați numarul de elemente ale mulțimii:

$$B = \left\{\sqrt{\left(\frac{m}{2020} - 1\right)\left(\frac{n}{2020} - 1\right)} \,|\, (m,n) \in A\right\}$$

2. Fie *ABCD* un dreptunghi și punctul *E* astfel încât *B*,*D*,*C*,*E* sunt vârfurile unui trapez isoscel de baze (BD) și (CE).

a) Arătați că $AE \perp EC$;

b) Dacă $CF \perp BD, F \in (BD)$, arătați că $AE = 2CF$.

3. Fie dreptunghiul *ABCD* cu $AB > CD$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ intersectează pe *CD* în *Q* și pe *AD* în *P*. Fie $(DT$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle PDQ$ $\left(T \in (BP)\right)$. Dacă $CT \cap AD = \{M\}$ și $AT \cap CD = \{S\}$, arătați că $SQ = DM$.

4. Fie $x, y, z \in \mathbb{N}$, nenule cu $(x, y, z) = 1$, astfel încât $\frac{xy}{x+y} = z$. Arătați că $x + y$ este pătrat perfect.

Succes!

NOTĂ :

- **Toate subiectele sunt obligatorii**
- **Timp de lucru 2 ore**
- **Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte**

Barem corectare clasa a VII-a

1. Fie mulțimea $A = \left\{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | m,n > 0 \text{ și } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2020}\right\}$.

a) Arătați că mulțime *A* este nevidă;

b) Arătați că dacă $(m,n) \in A$, atunci $m > 2020$ și $n > 2020$;

c) Determinați numarul de elemente ale mulțimii:

$$B = \left\{\sqrt{\left(\frac{m}{2020} - 1\right)\left(\frac{n}{2020} - 1\right)} \,|(m,n) \in A\right\}$$

Soluție

a) Două numere care respectă cerința sunt $m = n = 4040$, deci $A \neq \emptyset$………………………**2p**

b) Daca $(m,n) \in A$ atunci $\frac{1}{m} = \frac{1}{2020} - \frac{1}{n} < \frac{1}{2020}$, deci $m > 2020$, etc………………………**2p**

c) Din $(m,n) \in A \Rightarrow mn = 2020(m+n)$ și atunci

$\left(\frac{m}{2020} - 1\right)\left(\frac{n}{2020} - 1\right) = \frac{mn - 2020(m+n) + 2020^2}{2020^2} = 1$……………………………………**2p**

Finalizare $(\forall)$ $(m,n) \in A \Rightarrow B = \{1\}$…………………………………………………**1p**

2. Fie *ABCD* un dreptunghi și punctul *E* astfel încât *B*,*D*,*C*,*E* sunt vârfurile unui trapez isoscel de baze (BD) $și$ (CE).

a) Arătați că $AE \perp EC$;

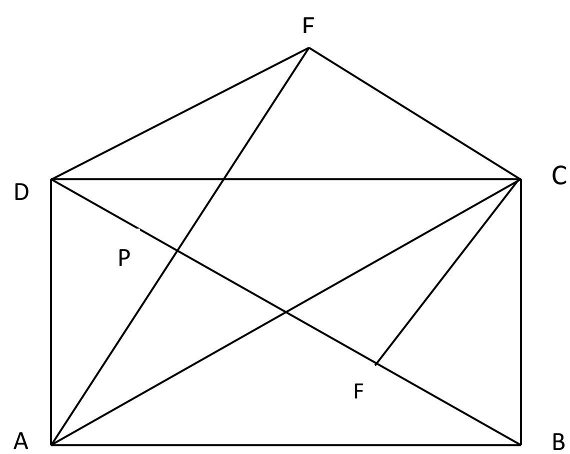
b) Dacă $CF \perp BD, F \in (BD)$, arătați că $AE = 2CF$.

Soluție

a) Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Deoarece *BDEC (sau BDCE)* este trapez isoscel $\Rightarrow [OC] \equiv [OE]$

deci $OE = \frac{AC}{2}$ și cum *OE* este mediană în $\Delta ACE \Rightarrow m(\sphericalangle AEC) = 90^0$………………………**4p**

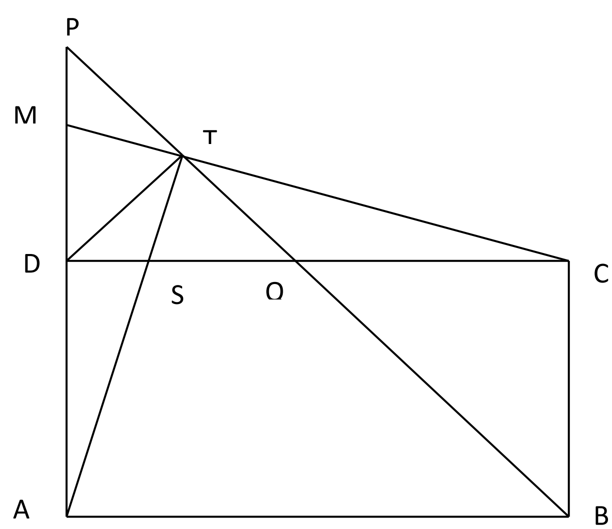
b) Fie $\{P\} = AE \cap DB$, deoarece $AE \perp EC \Rightarrow AE \perp DB$ și cum ΔADE este isoscel rezultă că *P* este mijlocul lui $[AE]$ deci $CF = PE = \frac{AE}{2}$……………………………………………**3p**



3. Fie dreptunghiul *ABCD* cu $AB > CB$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ intersectează pe *CD* în *Q* și pe *AD* în *P*. Fie $(DT$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle PDQ$ $\big(T \in (BP)\big)$. Dacă $CT \cap AD = \{M\}$ și $AT \cap CD = \{S\}$, arătați că $SQ = DM$.

Soluție

$SQ = DM \Leftrightarrow DS = MP$ (ΔDPQ dreptunghic isoscel)……………………………………..………**1p**
$AD \equiv BC \equiv QC, \sphericalangle ADT = \sphericalangle TQC, DT \equiv TQ$, deci $\Delta ADT \equiv \Delta CQT\ (LUL) \Rightarrow \sphericalangle DTA \equiv \sphericalangle CTQ$……………………………………………………………………………………………..**3p**
$\sphericalangle SDT \equiv \sphericalangle TPM, \sphericalangle DTS \equiv \sphericalangle PTM, PT \equiv DT \Rightarrow \Delta DST \equiv \Delta PMT \Rightarrow DS \equiv MP$……………...**3p**



4. Fie $x, y, z \in \mathbb{N}$, nenule cu $(x, y, z) = 1$, astfel încât $\frac{xy}{x+y} = z$. Arătați că $x + y$ este pătrat perfect.

Soluție

Fie $d = (x, y)$, deci $x = da$ și $y = db$, $(a, b) = 1$. Din $xy = z(x + y) \Rightarrow dab = z(a + b)$….**1p**

Din $(x, y, z) = 1 \Rightarrow z|ab$…………………………………………………………………….….**2p**
Din $(a, a + b) = 1 \Rightarrow a|z$……………………………………………………………………….**2p**
Analog $b|z$ deci $z = ab \Rightarrow d = a + b$, deci $x + y = d(a + b) = d^2$………………………....**2p**

Subiecte propuse de prof. Doru Buzac