Colegiul Național
Emil Racoviță Iași

Excelență în educație

Aleea Nicolina Nr. 4
IASI - 700221, ROMANIA
CF 4701592
Tel/Fax: +(40)-232-234 272
email: office@racovita.ro
Web page: www.racovita.ro

Leris 2019, ediția a II-a

Clasa a VIII-a

1. a) Fie a,b,x,y numere reale . Demonstrați că $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\geq\left(ax+by\right)^2$.

b) Fie $a,b,c>0$ cu $a+b+c=3$. Demonstrați că:

$$\sqrt{a(2b+5c)}+\sqrt{b(2c+5a)}+\sqrt{c(2a+5b)}\leq 3\sqrt{7}$$

2. Fie A,B,C,D puncte necoplanare, M mijlocul lui [AB] și N mijlocul lui [CD], iar G centrul de greutate al triunghiului ABC.

a. Demonstrați că punctele D, M, G și N sunt coplanare.
b. Dacă GN∩(ABD)={P}, arătați că punctul G este centrul de greutate al triunghiului PCD.
c. Arătați că dreapta GD trece prin mijlocul segmentului (MN).

3. Fie *X* o mulțime cu 2019 elemente . Determinați valoarea maximă a lui *m* pentru care există *m* submulțimi distincte ale lui *X* cu proprietatea că oricare două au intersecția nevidă.

Succes!

NOTĂ :

- **Toate subiectele sunt obligatorii**
- **Timp de lucru 2 ore**
- **Fiecare subiect este notat de la 0 la 7 puncte**

Aleea Nicolina Nr. 4
IASI - 700221, ROMANIA
CF 4701592
Tel/Fax: +(40)-232-234 272
email: office@racovita.ro
Web page: www.racovita.ro

Leris 2019, ediția a II-a

Clasa a VIII-a Barem

1. a) Fie a,b,x,y numere reale . Demonstrați că $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\geq\left(ax+by\right)^2$.

b) Fie $a,b,c>0$ cu $a+b+c=3$. Demonstrați că:

$$\sqrt{a(2b+5c)}+\sqrt{b(2c+5a)}+\sqrt{c(2a+5b)}\leq 3\sqrt{7}$$

Soluție

a)……………………………………………………………………………………3p

b) Aplicăm inegalitatea CBS

$$\left(\sqrt{a(2b+5c)}+\sqrt{b(2c+5a)}+\sqrt{c(2a+5b)}\right)^2\leq\left(a+b+c\right)\left(7a+7b+7c\right)$$

De unde rezultă concluzia………………………………………………………………..4p

2. Fie A,B,C,D puncte necoplanare, M mijlocul lui [AB] și N mijlocul lui [CD], iar G centrul de greutate al triunghiului ABC.

a. Demonstrați că punctele D, M, G și N sunt coplanare.
b. Dacă GN∩(ABD)={P}, arătați că punctul G este centrul de greutate al triunghiului PCD.
c. Arătați că dreapta GD trece prin mijlocul segmentului (MN).

Soluție

a) $G\in CM\subset(CMD)$ ………………………………………………………………..2p

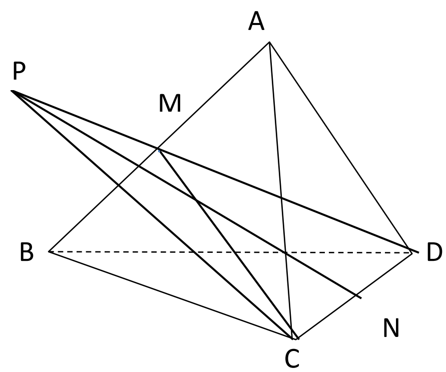
b) Fie $GN\cap MD=\{P\}$. In triunghiul CMD aplicăm Menelaus pentru P-G-N

$$\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DP}{PM}\cdot\frac{MG}{GC}=1\Rightarrow\frac{MG}{GC}=\frac{PM}{PD}=\frac{1}{2}\Rightarrow PD=2PM$$

……………………….……2p

M mijlocul lui (PD) deci G este centrul de greutate al triunghiului PCD…….………..1p

c) MN linie mijlocie in PCD, deci DG trece prin mijlocul lui (MN)……………………2p



3. Fie X o mulțime cu 2019 elemente . Determinați valoarea maximă a lui m pentru care există m submulțimi distincte ale lui X cu proprietatea că oricare două au intersecția nevidă.

Soluție

Numărul căutat este 2^{2018} ………………………………………………………….…....1p

Consideră toate submulțimile care îl conțin pe x_1 . Acestea sunt în număr de 2^{2018} ……2p

Grupăm câte două submulțimile (A,X\A) . Dintr-o grupă putem avea maxim o mulțime, deci $m \le 2^{2018}$ ……………………………………………………………………4p

Subiecte propuse de prof. Dănuț Aramă